Mécanique

Fondements et applications

Mécanique
Fondements et applications
Avec 320 exercices et problèmes résolus

José-Philippe PÉREZ
Professeur émérite de l'Université Paul-Sabatier de Toulouse

Avec la participation de Olivier PUJOL
Maître de conférences à l'Université de Lille

7e édition

DUNOD

Liste des ouvrages de l'auteur aux éditions Dunod

A. Lannes et J.-Ph. Pérez, *Optique de Fourier en Microscopie électronique*, Masson, 1983.
J.-Ph. Pérez, R. Carles et R. Fleckinger, *Électromagnétisme, fondements et applications*, 4^{e} éd., tirage corrigé 2009.
J.-Ph. Pérez, *Optique, fondements et applications*, 7^{e} éd., tirage corrigé 2011.
J.-Ph. Pérez, *Relativité et invariance, fondements et applications*, 2^{e} éd., tirage corrigé 2011.
J.-Ph. Pérez, *Thermodynamique, fondements et applications*, 3^{e} éd., tirage corrigé 2011.
J.-Ph. Pérez, C. Lagoute, J.-Y. Fourniol et S. Bouhours, *Électronique, fondements et applications*, 2^{e} éd., 2012.
J.-Ph. Pérez, *Mécanique, fondements et applications*, 7^{e} éd., 2014.

Liste des ouvrages du même auteur aux éditions De Boeck

J.-Ph. Pérez, O. Pujol, C. Lagoute, P. Puech et É. Anterrieu, *Physique, une introduction*, 2008.
J.-Ph. Pérez, C. Lagoute, O. Pujol et É. Desmeules, *Leçons de Physique, une approche moderne*, 2011.
J.-Ph. Pérez, R. Carles et O. Pujol, *Quantique, fondements et applications*, 2013.

5 rue Laromiguière, 75005 Paris
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-071232-8

Table des matières

16. Cinématique du solide et des solides en contact

17. Éléments cinétiques des systèmes matériels

18. Dynamique des systèmes matériels

19. Lois de Coulomb sur le frottement solide

20. Énergétique des systèmes matériels

21. Mécanique des chocs

Les Anglais enseignent la mécanique comme une science expérimentale ; sur le continent, on l'expose toujours plus ou moins comme une science déductive et a priori. Ce sont les anglais qui ont raison, cela va sans dire ; [...] Ce n'est pas tout, il n'y a pas d'espace absolu [...].

Henri Poincaré
La science et l'hypothèse, p. 113, 1902

Avant-propos

Ce cours de mécanique newtonienne correspond globalement à l'enseignement donné dans les trois années des licences de physique (mécanique incluse) des universités.

Il nous a paru pédagogiquement intéressant de le découper en leçons quasi autonomes. Un tel découpage a entraîné quelques redites, qu'on voudra bien considérer comme des points importants toujours utiles de rappeler.

La première partie concerne d'abord la mécanique du corpuscule en interaction avec des systèmes que l'on schématise uniquement par les forces qu'ils exercent : force de pesanteur, force de Lorentz, force de contact, force élastique, etc. Afin de rompre avec un exposé dépassé de la mécanique, qui tend à réduire cette partie de la physique à un problème de projections de vecteurs et à une résolution d'équations différentielles, nous avons privilégié l'énergie dans la résolution des problèmes unidimensionnels et largement utilisé les possibilités qu'offrent, à des fins de discussions qualitatives, les concepts d'énergie potentielle et d'énergie mécanique.

Dans la deuxième partie, on présente la mécanique des N corpuscules en interaction et on établit les théorèmes de la quantité de mouvement, du moment cinétique et de l'énergie. On souligne alors la complexité du problème et donc tout l'intérêt de l'approximation du problème à deux corps. On termine cette partie en développant successivement les collisions newtoniennes de deux particules, et la diffusion de particules. Cet ensemble constitue ce qui est en général traité en première année de licence ou des classes préparatoires. Dans cette partie, on ne manque de rappeler que les lois de la mécanique s'appliquent aussi aux systèmes vivants.

Avec la troisième partie, plus technique, la séparation est suffisamment nette. On commence par la cinématique des corps indéformables (solides) et celle, très utile dans la pratique, des solides en contact. Dans tout le développement, on s'appuie modérément sur le concept de torseur d'intérêt limité. Ainsi, afin de compenser ce qui pourrait paraître comme un excès de formalisme, on insiste sur de nombreux thèmes physiques : les systèmes ouverts (fusées, etc.), la statique, la rotation d'un solide autour d'un axe avec l'équilibrage des machines tournantes, le mouvement d'un solide autour d'un point, notamment le gyroscope, le mouvement de Lagrange et Poisson dans l'approximation gyroscopique et son extension au magnétisme, précisément la Résonance Magnétique Nucléaire, enfin les oscillateurs couplés, en particulier les N oscillateurs identiques en interaction qui schématisent un solide déformable unidimensionnel.

Enfin, on aborde alors la quatrième et dernière partie sur les fluides : la statique, la cinématique des écoulements, la dynamique des fluides non visqueux, la viscosité et la propagation des ondes acoustiques dans les milieux continus.

En physiciens, nous sommes très sensibles aux lois de conservation et donc à l'interprétation des théorèmes généraux de la mécanique en termes de bilans de grandeurs. Aussi avons-nous volontairement subordonné le torseur dynamique au torseur cinétique et souligné l'importance des théorèmes d'Euler en mécanique des systèmes ouverts, notamment dans le cas des fluides. Dans ce contexte, nous avons tenu à donner un aperçu de la mécanique analytique, équations de Lagrange et équations canoniques d'Hamilton, ces dernières étant en marge des programmes mais au cœur de la physique moderne.

Cet ouvrage s'adresse d'abord aux étudiants : il doit donc être clair et efficace. Aussi la typographie est-elle volontairement aérée, le renvoi à des formules éloignées pratiquement inexistant, les appendices et les mathématiques juste nécessaires. Des exercices et des problèmes, concrets et en nombre suffisant (environ 320), sont rassemblés à la suite des différents chapitres et leurs solutions réunies à la fin de l'ouvrage. Ces dernières permettront à l'étudiant, et plus largement à l'autodidacte, de tester sa propre compréhension du cours, d'enrichir sa réflexion sur le contenu et surtout de développer sa capacité de travail autonome.

Nous pensons avoir rassemblé, dans un seul ouvrage, tous les éléments indispensables à une acquisition solide des connaissances fondamentales en mécanique.

Cette nouvelle édition s'est enrichie de nombreux points d'actualisation, de précisions historiques, de plusieurs problèmes originaux et d'une annexe supplémentaire centrée sur l'illustration et la gestion informatique de plusieurs problèmes concrets de mécanique.

Ce livre prend en compte toutes les discussions intéressantes que j'ai eues avec des collègues des universités et des classes préparatoires. Il s'inspire aussi des réactions exprimées par des étudiants de la licence et de l'agrégation de physique. Nous les remercions pour leurs remarques et commentaires constructifs.

Toulouse, juin 2014

Les grands noms de la mécanique

Archimède

Mathématicien et physicien grec, né à Syracuse en 287 av. J-C. et mort en 242. Il fut à la fois grand théoricien et habile expérimentateur. Sa contribution en physique la plus connue est le célèbre théorème d'hydrostatique qui porte son nom.

Daniel Bernoulli

Mathématicien et physicien suisse, né à Groningue en 1700 et mort à Bâle en 1782. C'est à Saint-Pétersbourg qu'il mène des recherches en mécanique des fluides ; il publie sa contribution majeure *Hydrodynamica*, en 1738, dans laquelle on peut reconnaître la célèbre équation de conservation de l'énergie en mécanique des fluides et les éléments de la théorie cinétique des gaz.

Jacques Binet

Mathématicien et astronome français, né à Rennes en 1786 et mort à Paris en mai 1856. À sa sortie de l'École polytechnique il devient répétiteur de géométrie descriptive dans cet établissement, puis professeur de mécanique en remplacement de Simon Denis Poisson. Il est surtout connu pour ses travaux dans le domaine de l'astronomie ; ses formules de cinématique donnent l'expression en coordonnées polaires de la vitesse et de l'accélération des corps soumis à une accélération centrale, telles les planètes du système solaire.

Tycho Brahe

Astronome danois, né à Knudsrup en 1546 et mort à Prague en 1601. En 1576, Frédéric II du Danemark le charge de construire un observatoire dans l'île de Hveen. Grand observateur, il accumule de nombreuses données astronomiques, pendant une trentaine d'années. Il poursuit ses travaux à Prague, assisté, peu avant sa mort, par un jeune astronome J. Kepler. Il reste cependant attaché aux idées géocentriques de Ptolémée.

Nicolas Copernic

Astronome polonais, né à Thorn en 1473 et mort à Frauenburg en 1543. Copernic, qui était chanoine, attendit la fin de sa vie pour publier son célèbre traité *De revolutionibus*. Son œuvre fut moins inspirée par les observations astronomiques que par sa ferme conviction que le système de Ptolémée manquait de simplicité, d'élégance, bref de symétrie. Ce dernier point l'incita à tort à supposer que les trajectoires des planètes étaient nécessairement circulaires, ce que Kepler corrigea un siècle plus tard grâce aux observations de Brahe.

Gaspard Coriolis

Ingénieur français, né à Paris en 1792 et mort à Paris en 1843. Devenu professeur de mécanique, il met en évidence l'existence, dans tout référentiel en mouvement accéléré par rapport au référentiel terrestre, d'une force d'inertie proportionnelle à la vitesse.

Charles de Coulomb

Ingénieur et physicien français, né à Angoulême en 1736 et mort à Paris en 1806. Initialement ingénieur de l'armée, il abandonne cette activité à 36 ans pour se consacrer à la recherche scientifique. Il publie en 1779 un traité sur la théorie des machines simples dans lequel il donne les lois du frottement solide. Mais son œuvre principale concerne l'électromagnétisme, notamment la force d'interaction entre charges électriques, proportionnelle à $1/r^2$, et le magnétisme terrestre.

Leonhard Euler

Mathématicien suisse, né à Bâle en 1707 et mort à Saint-Pétersbourg en 1783. Il applique à la mécanique les résultats importants qu'il établit sur l'intégration des équations différentielles. Il publie en 1736 un *Traité complet de mécanique*.

Léon Foucault

Physicien français, né à Paris en 1819 et mort à Paris en 1868. Autodidacte et inventeur de talent, il apporte des contributions importantes, notamment en optique pour corriger les miroirs de leurs aberrations géométriques et pour mesurer avec précision la vitesse de la lumière. Il est surtout connu pour ses études en mécanique ; il met en évidence, de façon spectaculaire, l'influence de la rotation de la Terre sur le comportement d'un pendule simple (pendule de Foucault) et invente le gyroscope.

Galileo Galilei dit Galilée

Astronome et physicien italien, né à Pise en 1564 et mort à Arcetri (près de Florence) en 1642. Il est considéré comme le précurseur de la science moderne, d'une part en utilisant les mathématiques pour décrire les lois de la physique, et d'autre part en testant la validité de ces lois par l'expérimentation. Ses principales contributions en astronomie sont l'observation de la surface de la Lune et la découverte des satellites de Jupiter à l'aide d'instruments d'optique qu'il a lui-même mis au point. L'ensemble est publié en 1610 dans *Le messager des étoiles*. Cependant, c'est sa contribution en mécanique qui est la plus célèbre. En étudiant le mouvement des corps, il découvre les lois de la chute libre, notamment l'indépendance de la masse lorsque la résistance de l'air est négligée, l'isochronisme des petites oscillations d'un pendule ; il perçoit aussi le principe de l'inertie et se rallie aux idées héliocentriques de Copernic. Il publie alors le *Dialogue sur les deux principaux systèmes du monde* en 1632, ce qui lui vaut une condamnation par l'Inquisition, en raison de sa vision copernicienne du monde (mobilité de la Terre). C'est à la fin de ce procès qu'il aurait prononcé la célèbre phrase « *eppur si muove* » (Et pourtant, elle tourne).

William Rowan Hamilton

Mathématicien et physicien irlandais, né en 1806 à Dublin et mort en 1865 près de Dublin. Enfant prodige puis étudiant génial, il impressionne à 22 ans l'Académie Royale d'Irlande en présentant un exposé moderne sur la théorie des rayons lumineux. Ce travail est le point de départ d'une contribution capitale en dynamique qui s'achèvera en 1833 sur une remarquable analogie entre l'optique et la mécanique. Cette synthèse débouchera sur la relation de L. de Broglie et sur l'équation de Schrödinger en mécanique ondulatoire (cf. *Quantique*).

Christian Huygens

Mathématicien, astronome et physicien hollandais, né à La Haye en 1629 et mort en 1695. Il fut à l'origine de la théorie ondulatoire de la lumière et, à ce titre, s'opposa à la théorie corpusculaire de Newton. Il interpréta la propagation rectiligne de la lumière dans les milieux homognes et isotropes en introduisant le concept de surface d'onde. Expérimentateur confirmé, il découvrit, avec les instruments d'optique qu'il mit lui-même au point (oculaire d'une lunette astronomique), les anneaux de Saturne ainsi que son satellite Titan. En mécanique, on lui attribue l'invention du pendule cycloïdal.

Johannes Kepler

Astronome allemand, né à Weil en 1571 et mort à Ratisbonne en 1630. D'origine modeste, Kepler se révèle vite très bon théoricien et adepte des idées héliocentriques de Copernic. Chassé de Graz où il enseignait les mathématiques, il se réfugie à Prague dans l'observatoire de Brahe. Les observations de ce dernier lui permettent de découvrir les célèbres lois qui portent son nom.

Johann Kœnig

Mécanicien allemand, né à Büdinger en 1712 et mort à Amerongen aux Pays-Bas en 1757. Sa contribution importante en mécanique est connue sous le nom de théorèmes de Kœnig, à ne pas confondre avec le mécanicien français Gabriel Kœnigs.

Joseph-Louis de Lagrange

Mathématicien italo-français, né à Turin en 1736 et mort à Paris en 1813. Il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de son époque. Sa contribution majeure en mécanique, a été publiée en 1788 sous le titre *Mécanique analytique* ; on y trouve les célèbres équations qui permettent d'étudier le mouvement des corps sans utiliser la géométrie et le calcul vectoriel. À la mort de Frédéric II de Prusse, qui l'avait chargé de diriger la section mathématique de l'Académie des Sciences de Berlin, il est accueilli à Paris pour poursuivre ses travaux.

Pierre-Simon de Laplace

Astronome, mathématicien et physicien français, né à Beaumont-en-Auge en 1749 et mort à Paris en 1827. Bien que professeur de mathématiques et homme politique, ses travaux en physique sont nombreux. Il signe diverses contributions sur la capillarité, la propagation du son dans l'air, l'évolution adiabatique des gaz et le travail des forces électromagnétiques. Cependant, c'est sa publication sur la mécanique céleste, *Exposition du système du monde*, qui est la plus remarquée. On y trouve développées les conditions d'un déterminisme rigoureux à la base d'une physique totalement prédictive.

Pierre Louis de Maupertuis

Philosphe et scientifique français, né à Saint-Malo en 1698 et mort à Bâle en 1759. Il est nommé membre de l'Académie des sciences dès 1723. Il publie alors divers travaux de mécanique, d'astronomie et de biologie. En 1728, il se rend en Angleterre et est élu membre de la Royal Society ; il découvre là les idées de Newton, en particulier la gravitation universelle. Il devient un ardent défenseur en France de ces idées, aboutissant à l'aplatissement de la Terre aux pôles, et donc un opposant à J. Cassini, qui affirmait au contraire que la Terre était allongée aux pôles. Les mesures directes auxquelles il participa activement, en se rendant en Laponie, confirme la thèse de Newton. Il publie en 1746 un article sur le principe de moindre action, dont l'argumentation finaliste est critiquée, notamment par Diderot.

Isaac Newton

Mathématicien, astronome et physicien anglais, né en 1642 à Woolsthorpe et mort en 1727 à Kensington. Il est considéré avec Einstein comme le plus grand physicien de tous les temps. Curieusement et comme ce dernier, il fut un élève moyen qui ne révéla au collège aucune capacité exceptionnelle. C'est à Cambridge que l'on remarqua ses grandes possibilités. Plus influencé par Descartes que par Aristote, il publie en 1687 une synthèse magistrale de la mécanique *Principia mathematica* ; il y énonce les fondements de la dynamique et relie, en introduisant la loi de la gravitation universelle, le mouvement des planètes et la chute des corps. En optique, il s'opposa à C. Huygens et R. Hooke, adeptes d'une théorie ondulatoire de la lumière. Cependant, sa contribution faite dans "Optics" est elle aussi exceptionnelle : il interprète la décomposition spectrale de la lumière, à partir d'expériences conues avec des prismes, et montre que la couleur blanche est un mélange des différentes couleurs spectrales ; il explique aussi la formation des images par des miroirs et suggère même la possibilité d'échange entre lumière et matière.

Blaise Pascal

Mathématicien, physicien et philosophe français, né à Clermont-Ferrand en 1623 et mort à Paris en 1662. Enfant et adolescent génial, Pascal est vite reconnu par toute la communauté scientifique comme un mathématicien de tout premier plan. Sa contribution la plus importante en physique concerne la statique des fluides.

Henri Pitot

Ingénieur français, né à Aramon (Gard) en 1695 et mort en 1771. Après des études en mathématiques et en astronomie, il devient assistant du physicien Réaumur en 1723. Spécialisé en hydraulique, il devient surintendant du Canal du Midi et construit un aqueduc pour l'alimentation en eau de Montpellier. Il participe notamment à la restauration du pont du Gard par la réalisation d'un second ouvrage d'art, accolé à ce dernier, et réalise de nombreuses digues de protection, notamment sur le cours du fleuve Vidourle. Il est surtout connu pour être l'inventeur du tube qui permet de mesurer la vitesse d'écoulement d'un fluide.

Jean-Louis Poiseuille

Médecin et physicien français, né à Paris en 1799 et mort à Paris en 1869. Son étude de la circulation sanguine le conduit à analyser avec soin l'écoulement laminaire des fluides visqueux dans les tuyaux cylindriques.

Henri Resal

Ingénieur et mathématicien français, né à Plombières en 1828 et mort à Anemasse en 1896. Professeur de mécanique à l'École polytechnique, il résout de façon élégante, en projetant dans un système d'axes adapté, le mouvement des solides de révolution en rotation autour d'un point.

Osborne Reynolds

Ingénieur anglais, né à Belfast en 1842 et mort à Watchet en 1912. Il apporta en 1883 une contribution importante dans la distinction quantitative entre les régimes d'écoulement laminaire et turbulent.

Ernest Rutherford

Physicien britannique, né à Brightwater, près de Nelson, en Nouvelle Zélande en 1871 et mort à Cambridge en 1937. Même si très jeune, en classe, il excellait sur tous les sujets, Rutherford fut intéressé surtout par les sciences et les mathématiques. Boursier, il poursuit ses études en Angleterre, à Cambridge, où il devint l'élève de J.J. Thomson. Après avoir été professeur à Montréal, à Manchester, puis à Cambridge en 1909, il prit la direction du Laboratoire Cavendish en 1919. Il est surtout connu pour ses travaux sur la radioactivité, notamment l'étude des rayons α, qu'il identifie à des noyaux d'hélium, et de leur diffusion, ce qui lui permet d'établir le modèle actuel de la structure atomique. Il reçut, en 1908, le prix Nobel de chimie.

Giovanni Battista Venturi

Physicien italien, né à Reggio d'Émilie en 1746 et mort en 1822 dans sa ville natale. En 1773, il devient professeur de géométrie et philosophie à l'Université de Modène et en 1776 professeur de physique à l'École du génie militaire de Modène. Établi à Paris en 1796, c'est suite à ses nombreux travaux en dynamique des fluides qu'il décrit dans un ouvrage ce qui deviendra l'effet Venturi, précisément la relation entre la vitesse d'un fluide et sa pression.

Evangelista Torricelli

Physicien italien, né à Faenza en 1608 et mort à Florence en 1647. Il est surtout connu pour ses travaux sur la pression atmosphérique, effectués à la demande des fontainiers de Florence ; ces derniers souhaitaient élever l'eau à plus de 10 m à l'aide d'une pompe aspirante.

Constantes physiques, notations et symboles

Les symboles utilisés sont généralement ceux recommandés par l'AFNOR.

I. — CONSTANTES PHYSIQUES

$G = 6{,}673\,84(80) \times 10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2}	Constante newtonienne de gravitation $G = (6{,}673\ 84 \pm 0{,}000\,80) \times 10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2}
$c = 299\,792\,458$ m.s^{-1}	Constante d'Einstein ou vitesse de la lumière dans le vide (valeur exacte)
$h = 6,626\,069\,57(29) \times 10^{-34}$ J.s	Constante de Planck
$m_e = 0,910\,938\,291(40) \times 10^{-30}$ kg	Masse de l'électron
$m_p = 1,672\,621\,777(74) \times 10^{-27}$ kg	Masse du proton
$N_A = 6,022\,141\,29(27) \times 10^{23}$ mol^{-1}	Nombre d'Avogadro
$R = N_A k_B = 8,314\,462(75)$ J.mol^{-1}.K^{-1}	Constante molaire des gaz parfaits
$k_B = R/N_A = 1,380\,648\,8(13) \times 10^{-23}$ J.K^{-1}	Constante de Boltzmann
$e = 1,602\,176\,565(35) \times 10^{-19}$ C	Charge élémentaire (charge de l'électron : $-e$)
$F = N_A e = 96\,485,339\,9(24)$ C.mol^{-1}	Constante de Faraday
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N.A^{-2}	Perméabilité du vide (valeur exacte)
$\varepsilon_0 = (\mu_0 c^2)^{-1} = 8,854\,187\,817... \times 10^{-12}$ F.m^{-1}	Permittivité du vide (valeur exacte)
$q_e^2 = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$	$q_e^2 = 230,\ 707\,705\,6 \times 10^{-30}$ S.I

II. — CONSTANTES DU SYSTÈME SOLAIRE

II . 1 . — Caractéristiques du Soleil

Masse	$M_S = 1,989\,1 \times 10^{30}$ kg $\approx 2 \times 10^{30}$ kg
Rayon	$R_S = 696\,000$ km $\approx 0,7 \times 10^9$ m
Diamètre apparent	$\theta_S = 32' \approx 0,5°$

II.2. — Caractéristiques de la Terre

Masse	$M_T = 5,972 \times 10^{24}$ kg $\approx 6 \times 10^{24}$ kg
Rayons polaire	$R_{T,p} = 6\,357$ km $= 6,357 \times 10^6$ m
équatorial	$R_{T,e} = 6\,378$ km $= 6,378 \times 10^6$ m
moyen	$R_T \approx 6\,371$ km $\approx 6,4 \times 10^6$ m
Demi-grand axe de l'orbite elliptique	$a \approx 149,6 \times 10^9$ m
Excentricité	$e \approx 0,016\,71$
Vitesse orbitale moyenne	$v_T \approx 29,8$ km.s^{-1}.

Le plan de la trajectoire de la Terre autour du Soleil est le plan de l'*écliptique*. Il fait avec le plan équatorial l'angle pratiquement constant $\theta = 23°26'$ (Fig. 1a).

Le parsec, mot condensant « *par*allaxe d'une *sec*onde », est la distance à laquelle le rayon de l'orbite terrestre autour du Soleil est vu sous un angle de 1 seconde d'arc (5 µrad) (Fig. 1b) :

$$1 \text{ pc} \approx 3,085\,677 \times 10^{16} \text{ m} \quad \text{soit} \quad 1 \text{ pc} \approx 30,85 \text{ Pm}$$

On utilise souvent en astrophysique l'année-lumière (al) qui est la distance parcourue par la lumière, dans le vide, pendant une année julienne de 365,25 jours :

$$1 \text{ al} = 299\,792\,458 \times 365,25 \times 24 \times 3\,600 \approx 9,460\,730 \approx 9,46 \text{ Pm}$$

On a donc $1 \text{ pc} \approx 3,26$ al.

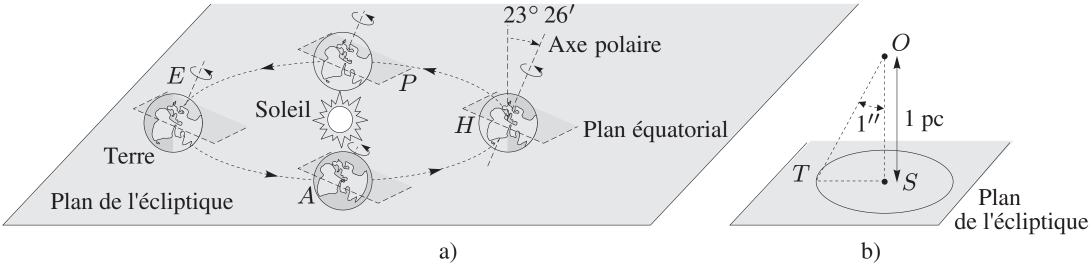

FIG. 1. — a) Plan de l'écliptique et plan équatorial b) Parsec

II.3. — Caractéristiques des planètes

Les planètes Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne sont connues depuis l'Antiquité ; elles sont à l'origine des noms des jours de la semaine, respectivement : Mercredi, Vendredi, Mardi, Jeudi, Samedi. Lundi vient de Lune comme « Monday » vient de « Moon » en anglais ; quant au dimanche, c'est le jour du Soleil en anglais « Sunday ».

La planète Uranus fut découverte en 1781 par l'astronome allemand William Herschel. En 1846, le Français Urbain Le Verrier et séparément l'Anglais John Adams « inventèrent » Neptune à partir des écarts observés entre la trajectoire théorique d'Uranus et sa trajectoire réelle, ce qui permit sa découverte par l'astronome berlinois Johann Galle quelques mois après.

Les caractéristiques des huit planètes du système solaire sont rassemblées dans le tableau 1. Les unités de ces grandeurs sont relatives à celles de la Terre.

Planètes	Masse	Rayon	Distance au Soleil	Période sidérale de rotation propre	Période sidérale de révolution autour du Soleil	Excentricité
Mercure	0,555	0,382	0,387	58,6 j	0,24	0,206
Vénus	0,815	0,949	0,723	243 j	0,615	0,007
Terre	1	1	1	1 j	1	0,017
Mars	0,107	0,533	1,52	24 h 37 min	1,88	0,093
Jupiter	318	11,2	5,20	9 h 55 min	11,86	0,048
Saturne	95,1	9,45	9,55	10 h 39 min	29,46	0,056
Uranus	14,5	4,01	19,2	17 h 14 min	84,07	0,046
Neptune	17,1	3,88	30,1	16 h 7 min	164,81	0,009

TAB. 1. — Caractéristiques principales des huit planètes du système solaire

II . 4 . — Caractéristiques de la Lune

Masse $M_L \approx 7,35 \times 10^{22}$ kg $\approx M_T/81$
Rayon $R_L \approx 1737$ km $= 1,7 \times 10^6$ m
Distance Terre-Lune $D_L \approx 383\,400$ km $= 383,4 \times 10^6$ m
Diamètre apparent $\theta_L \approx 33' \approx 0,5°$
Vitesse orbitale moyenne $v_L \approx 1$ km.s^{-1}
Période sidérale de révolution autour de la Terre : 27 j 7 h 3 min
Lunaison (durée entre deux nouvelles Lunes) : 29 j 12 h 44 min
Angle d'inclinaison du plan de l'orbite lunaire par rapport
au plan de l'écliptique : 5, 14 °

III . — NOTATIONS

$\mathcal{R}$ référentiel (repère d'espace et de temps)
$\mathbf{r} = \mathbf{OA}$ vecteur position d'un point courant A
$(\mathrm{d}\,\mathbf{U}/\,\mathrm{d}\,t)_{\mathcal{R}}$ dérivée du vecteur $\mathbf{U}$ par rapport au temps, relativement à la base de $\mathcal{R}$
$\mathbf{v}$, v vecteur vitesse de A par rapport à $\mathcal{R}$ et sa norme
$\mathbf{a}$, a vecteur accélération de A par rapport à $\mathcal{R}$ et sa norme
$\mathcal{S}$ solide (indéformable)
$\mathcal{S}_d$ système matériel (déformable)
$\mathbf{p}$, $\mathbf{P}$ quantité de mouvement d'un point ou d'un système
$\mathbf{L}_O$ moment cinétique au point O d'un point ou d'un système
$\mathcal{P}$ puissance
W travail
$\mathcal{E}_k$ énergie cinétique
$\mathcal{E}_p$ énergie potentielle

$\mathcal{E}_m$	énergie mécanique
$\mathbf{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}$	vecteur vitesse de rotation du solide S par rapport à $\mathcal{R}$
C, G	centre de masse ou centre d'inertie ($\approx$ centre de gravité)
$\mathcal{R}_0$	référentiel de Copernic
$\mathcal{R}_g$	référentiel géocentrique
$\mathcal{R}^*$	référentiel du centre de masse ou référentiel barycentrique
$\mathbf{g}$, g	champ de pesanteur et sa norme
$\mathcal{G}$, Φ	champ et potentiel de gravitation
$\mathbf{E}$, V	champ et potentiel électriques
$\mathbf{B}$	champ magnétique
$[P]_O$ ou $[\mathbf{P}, \mathbf{L}_O]$	torseur cinétique au point O
$[D]_O$ ou $[\mathbf{D}, \mathbf{N}_O]$	torseur dynamique au point O
$[I]_O$	opérateur ou tenseur d'inertie en O
$\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$	base orthonormée directe de $\mathcal{R}$
x, y, z	coordonnées cartésiennes de $\mathbf{r}$
ρ, φ, z	coordonnées cylindriques
r, θ, φ	coordonnées sphériques
ψ, θ, ϕ	angles d'Euler (précession, nutation, rotation propre)
$\dot{x}$	fonction dérivée de x par rapport au temps
$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi_x)$	élongation sinusoïdale
$\underline{x}$	valeur complexe de x
$\underline{x}(t) = x_m \exp[j(\omega t + \phi_x)]$	expression complexe de l'élongation sinusoïdale
T, f, ω	période, fréquence, pulsation
$\underline{x}_m = x_m \exp(j\phi_x)$	amplitude complexe
$\underline{x}$	valeur complexe de x
$\lvert\underline{x}\rvert$	module de $\underline{x}$
$\underline{x}^*$	complexe conjugué de $\underline{x}$
$\mathrm{Re}\{\underline{x}\}$, $\mathrm{Im}\{\underline{x}\}$	parties réelle et imaginaire du signal $\underline{x}$
$\mathcal{P}(t)$	puissance instantanée
ε	facteur de restitution en énergie cinétique
$\Phi(\mathbf{r})$	fonction potentiel des vitesses dans le plan Oxy ($\mathbf{v} = -\,\mathbf{grad}\,\Phi$)
$\Psi(\mathbf{r})$	fonction courant dans le plan Oxy ($\mathbf{v} = \mathbf{rot}(-\Psi\mathbf{e}_z)$)
$\mathcal{L}$	lagrangien
$\mathcal{H}$	hamiltonien
p	pression
ρ	masse volumique
$\mathbf{J}_m$	vecteur courant de matière
q_m	débit-masse
q_v	débit-volume
κ_T	coefficient de compressibilité isotherme
κ_S	coefficient de compressibilité isentropique

Z_c	impédance acoustique caractéristique
η	coefficient de viscosité
$\nu = \eta/\rho$	viscosité cinématique
ln	logarithme népérien
lg	logarithme décimal
lb	logarithme binaire
exp	exponentielle
$\approx$	sensiblement égal à
$\sim$	de l'ordre de

IV. — ALPHABET GREC

alpha	A	α	eta	H	η	nu	N	ν	tau	T	τ
beta	B	β	theta	Θ	θ	xi	Ξ	ξ	upsilon	Υ	υ
gamma	Γ	γ	iota	I	ι	omicron	O	o	phi	Φ	ϕ
delta	Δ	δ	kappa	K	κ	pi	Π	π	chi	X	χ
epsilon	E	ϵ	lambda	Λ	λ	rho	P	ρ	psi	Ψ	ψ
zeta	Z	ζ	mu	M	μ	sigma	Σ	σ	omega	Ω	ω

V. — MULTIPLES ET SOUS-MULTIPLES EN NOTATION SCIENTIFIQUE

Nom	Facteur	Origine	Signification	Année d'adoption	Symbole
yotta	10^{24}	grec (októ)	huit	1991	Y
zetta	10^{21}	latin (septem)	sept	1991	Z
exa	10^{18}	grec (hex)	six	1991	E
péta	10^{15}	grec (pente)	cinq	1975	P
téra	10^{12}	grec (teras)	monstre	1960	T
giga	10^{9}	grec (gigas)	géant	1960	G
méga	10^{6}	grec (megas)	grand	1960	M
kilo	10^{3}	grec (chiloi)	mille	1795	k
milli	10^{-3}	latin (mille)	mille	1960	m
micro	10^{-6}	grec (mikros)	petit	1960	μ
nano	10^{-9}	latin (nanus)	nain	1960	n
pico	10^{-12}	italien (piccolo)	petit	1960	p
femto	10^{-15}	danois (femtem)	quinze	1964	f
atto	10^{-18}	danois (atten)	dix-huit	1964	a
zepto	10^{-21}	latin (septem)	sept	1991	z
yocto	10^{-24}	grec (októ)	huit	1991	y

Description de l'ouvrage

L'ouvrage comporte plusieurs parties qui correspondent aux différentes étapes de l'enseignement de la mécanique dans les universités ou dans les classes préparatoires aux Grandes Écoles scientifiques. En dehors de la leçon 1 qui rassemble les rappels et les compléments sur le calcul vectoriel, le déroulement du cours est le suivant :

i) Partie I, Licence 1, semestre I

Leçons 2 à 12 : cinématique, dynamique et énergétique du point matériel, libre ou gêné, par rapport à un référentiel galiléen ou non.

ii) Partie II, Licence 1, semestre II

Leçons 13 à 15 : Dynamique et énergétique des systèmes de N points matériels (problème à deux corps, collisions et diffusion de particules).

iii) Partie III, Licence 2, semestre I

Leçons 16 à 21 : Dynamique et énergétique du solide et des systèmes de solides.

iv) Partie IV, Licence 2, semestre II, et licence 3

Leçons 22 à 32 : Applications de la mécanique des solides et introduction à la mécanique des fluides.

Les leçons 1, 2, 3, 4, 13, 16, 17, 18, 24, 28 ont un rôle central car elles contiennent les éléments indispensables (définitions, lois et principes) à l'étude des leçons qui suivent. Il faut donc les étudier avant d'aborder les suivantes. Même si ces dernières sont présentées dans un certain ordre, il est possible de les lire dans un ordre différent qui tienne compte des préoccupations et des intérêts du lecteur ; en effet, les leçons sont quasi autonomes et le renvoi à des formules éloignées pratiquement inexistant.

Par exemple, si l'on souhaite étudier la mécanique des solides, il est conseillé de lire les leçons 16, 17 et 18 avant ; de même, si l'on ne s'intéresse qu'à la mécanique des fluides, mieux vaut lire d'abord la leçon 28.

Méthode de travail

Lecture des leçons

Dans une première phase, une leçon doit être lue une première fois, en insistant sur l'introduction, laquelle situe la leçon dans le cours, et sur la conclusion qui répertorie l'ensemble des résultats essentiels.

Dans une deuxième phase, l'étudiant doit refaire avec soin tous les calculs intermédiaires.

Enfin, une dernière lecture devrait permettre d'appréhender complètement la leçon, notamment les résultats essentiels, les exemples significatifs et les ordres de grandeur.

Exercices et problèmes

Une fois la lecture de la leçon achevée, l'étudiant doit passer à la phase d'application en faisant des exercices simples et courts, directement liés au contenu de la leçon ; il doit essayer de résoudre ces exercices avec le seul support que constitue le cours. En cas de difficultés, un coup d'œil rapide sur la solution, proposée en fin d'ouvrage, devrait l'aider. Éviter cependant la simple lecture de la solution proposée et la mémorisation de la démonstration : mieux vaut revenir sur la leçon pour résoudre l'exercice. En cas de difficulté majeure, lire la solution et tenter de la refaire sans aucune aide un ou deux jours plus tard.

Une fois ces exercices rédigés, tenter de résoudre des problèmes d'examens et concours généralement plus longs.

Révision

Pour réviser, une ultime lecture devrait conforter l'apprentissage. Ne pas hésiter à souligner *au crayon* les parties essentielles et à porter en marge des remarques personnelles suggérées par d'autres ouvrages ou documents annexes, tels que des revues grand public (La Recherche, Science et Vie, Ciel et Espace, etc.).

Comment résoudre un problème de mécanique

On résout correctement un problème de mécanique si l'on s'astreint à répondre *successivement à plusieurs questions*, même lorsque le texte n'invite pas à y répondre explicitement.

Quel est le système étudié ?

Il faut définir le système dont on veut étudier le mouvement, c'est-à-dire le délimiter en précisant sa frontière commune avec l'extérieur.

Quel est le référentiel ?

Le temps étant un paramètre universel en mécanique newtonienne, définir le référentiel revient à préciser le repère d'espace par rapport auquel on se propose d'étudier le mouvement d'un système. Il est commode de lui associer une base orthonormée ($\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$). On désigne généralement ce référentiel par son origine O et une base orthonormée, ce que l'on écrit sommairement $\mathcal{R} = Oxyz$.

i) Ce référentiel est-il galiléen ou non ?

ii) Est-il terrestre ou non ?

iii) Si le référentiel est terrestre, on peut le considérer comme galiléen à condition de substituer à la force de gravitation le poids et d'exclure les mouvements très précis (déviation vers l'est...) ou très rapides (pour $v > 700 \text{ m.s}^{-1}$, le terme de Coriolis est supérieur à $1\,\%$ du poids).

iv) Si le référentiel a un mouvement accéléré par rapport au référentiel terrestre, il faut ajouter les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis. Dans le cas où ce mouvement se limite à une translation, la force de Coriolis est nulle.

Quel est le bilan des forces ?

Par forces, on entend plus largement forces et moments. On doit distinguer les forces extérieures et les forces intérieures au système considéré, les forces données et les forces inconnues, les forces qui dérivent d'une énergie potentielle et les autres. Dans le tableau 2, on énumère les principales forces qui apparaissent dans les problèmes concrets et on donne l'expression des énergies potentielles associées.

Quel est le nombre de degrés de liberté ?

Les degrés de liberté sont les paramètres $\{q_i\}$ dont dépend la position d'un système : *a priori*, un point en a trois, un solide six, un ensemble de n points et de s solides en a $3n + 6s$. Les contraintes limitent généralement ce nombre ; un solide, dont un point est fixé et qui tourne autour d'un axe déterminé, n'a plus qu'un seul degré de liberté. La connaissance de l'état du système exige en plus un nombre identique de données sur les dérivées $\dot{q}_i$

Remarque : Une condition de roulement sans glissement intégrable diminue le nombre de degrés de liberté.

Force	**Énergie potentielle**
Force de gravitation $(-Gm_1m_2/r^2)\,\mathbf{e}_r$	$\mathcal{E}_p = -Gm_1m_2/r + \text{Cte}$
Force de pesanteur $m\mathbf{g}$	$\mathcal{E}_p = -m\mathbf{g}\cdot\mathbf{OA} + \text{Cte} = mgz + \text{Cte}$ (l'axe Oz est *vertical ascendant*)
Force électrostatique $q\mathbf{E}$	$\mathcal{E}_p = qV + \text{Cte}$
Force magnétique $q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$	ne travaille pas
Force de rappel d'un ressort $-K(x-l_0)\,\mathbf{e}_x$	$\mathcal{E}_p = K(x-l_0)^2/2 + \text{Cte}$
Couple de torsion d'un fil $-C(\theta-\theta_0)\,\mathbf{e}_z$	$\mathcal{E}_p = C(\theta-\theta_0)^2/2 + \text{Cte}$
Force de frottement visqueux $-\alpha\mathbf{v}$ ou $-\beta v^2\mathbf{v}/v$	pas d'énergie potentielle
Force de frottement solide $(\mathbf{R},\ \boldsymbol{\Gamma}_O)$	pas d'énergie potentielle
Force d'inertie d'entraînement de *translation uniforme* : $-m\,\mathbf{a}_e = -m\,\mathbf{a}_{O'}$	$\mathcal{E}_p = m\,\mathbf{a}_{O'}\cdot\mathbf{OA} + \text{Cte}$
Force d'inertie d'entraînement de *rotation uniforme* : $-m\,\mathbf{a}_e = m\Omega^2\mathbf{HA}$	$\mathcal{E}_p = -m\Omega^2HA^2/2 + \text{Cte}$
Force d'inertie de Coriolis $-m\,\mathbf{a}_C = 2m\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v}$	ne travaille pas

TAB. 2.

Quelles sont les équations du mouvement ?

i) Si le système n'a qu'*un* seul degré de liberté et si les seules forces de puissances non nulles dérivent d'une énergie potentielle, appliquer la conservation de l'énergie (intégrale première de l'énergie) :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p = \text{Cte}$$

Cette équation suffit pour connaître le mouvement.

ii) Si le système a plusieurs degrés de liberté, rechercher en priorité les intégrales premières : conservation de l'énergie, conservation du moment cinétique en projection suivant un axe si le système tourne sans frottement autour de cet axe, etc.

iii) Exploiter *d'abord* le caractère vectoriel des théorèmes généraux :

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{P}}{\mathrm{d}\,t} = M\mathbf{a}_C = \mathbf{S}_{ex} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\,\mathbf{L}_O}{\mathrm{d}\,t} = \mathbf{M}_{O,\,ex}$$

iv) Si le système est soumis à une réaction inconnue passant par un point, appliquer le théorème du moment cinétique en ce point de telle sorte que la contribution de cette force inconnue disparaisse.

Quelles sont les expressions des éléments cinétiques $\mathbf{P}$, $\mathbf{L}_O$ et $\mathcal{E}_k$?

Bien que technique, cette question joue un rôle important. Il faut :

i) décomposer le système en éléments simples et utiliser les propriétés d'additivité,

ii) appliquer les théorèmes de Kœnig, lorsque le système n'a pas de point fixe dans le référentiel d'étude,

iii) utiliser les bases principales d'inertie, ce qui exige d'adopter une base de projection différente de la base du référentiel, et donc d'utiliser la formule de Bour :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{L}}{\mathrm{d}\,t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{L}}{\mathrm{d}\,t}\right)_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{L}$$

iv) Choisir les bases de projection les plus commodes : si le mouvement est rectiligne, projeter les vecteurs suivant l'axe du mouvement ; si la trajectoire d'un point est connue, utiliser les coordonnées intrinsèques ; s'il s'agit du mouvement d'un solide de révolution autour d'un point, utiliser la base de Resal avec les angles d'Euler, etc.

Comment résoudre les équations différentielles ?

C'est encore un problème technique. Les équations différentielles le plus souvent rencontrées en mécanique sont les suivantes :

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} + \omega_0^2 x = a \quad \text{(caractéristique des oscillations)}$$

$$\dot{v} + \frac{v}{\tau} = a \quad \text{(caractéristique de la mise en rotation d'une machine)}$$

La résolution de ces équations linéaires ne présente pas de difficulté. La conservation de l'énergie permet généralement d'analyser qualitativement le mouvement et donc de discuter des divers mouvements possibles d'un système. Cette analyse est très intéressante, notamment lorsque l'intégration de l'équation différentielle est délicate.

Quelle est l'interprétation des résultats obtenus ?

Cette *dernière* phase est capitale, car elle permet de vérifier les calculs et donc de revenir sur des erreurs de signes décisives ; par exemple, dans l'équation oscillante $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, l'erreur de signe exclut toute oscillation, ce qui doit pouvoir être décelé par une analyse préliminaire du mouvement, à la fois *qualitative* et *intuitive*.

La mécanique en vingt questions

1. *Pourquoi* tire-t-on généralement les fusées vers l'est à partir d'une base de lancement proche de l'équateur ?

2. Un corps abandonné au sommet du mât vertical d'un bateau, qui est animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel terrestre, tombe au pied du mât. *Pourquoi* ?

3. Alors qu'une énergie cinétique est toujours non négative, *pourquoi* l'énergie mécanique d'un système peut-elle être négative ?

4. *Pourquoi* la force de gravitation, qui est de loin la plus faible des forces fondamentales, est-elle, à l'échelon de l'Univers, la plus influente ?

5. *Pourquoi* la force de Coriolis terrestre intervient-elle dans l'expression de la loi fondamentale dans un référentiel terrestre et non la force d'inertie d'entraînement terrestre ?

6. On dit que la verticale ne passerait pas par le centre de la Terre, même si cette dernière était sphérique. *Pourquoi* ?

7. *Pourquoi* la chute identique de deux corps différents dans le vide est-elle un fait exceptionnel ?

8. *Pourquoi* y-a-t-il impesanteur (ou microgravité) dans un satellite artificiel ?

9. Les marées sont attribuées à la non-uniformité du champ de gravitation $\mathcal{G}_a$ dû aux astres autres que la Terre. *Pourquoi* la contribution de ces astres est-elle proportionnelle à M/D^3, M étant leur masse et D leur distance à la Terre ?

10. *Pourquoi* la Terre a-t-elle un mouvement plan autour du Soleil (plan de l'écliptique) ?

11. *Pourquoi* faut-il freiner les satellites provenant de la Terre lorsqu'on veut qu'ils aient une trajectoire circulaire autour de la Lune ?

12. *Pourquoi* la planète la plus éloignée du Soleil a-t-elle la période de révolution la plus grande ?

13. *Pourquoi* un satellite soumis à une force de frottement a-t-il sa vitesse qui augmente ?

14. *Pourquoi* l'avance du périhélie de Mercure n'est-elle pas interprétée comme celle d'Uranus par la perturbation due à une autre planète ?

15. Un champ magnétique stationnaire n'augmente pas la norme de la vitesse d'une particule chargée. *Pourquoi* est-il si largement utilisé dans les accélérateurs de particules ?

16. *Pourquoi* l'énergie mécanique d'un système isolé ne se conserve-t-elle pas dans tous les cas ?

17. *Pourquoi* le roulement sans glissement présente-t-il un intérêt énergétique ?

18. Lorsqu'on effectue le bilan des forces qui agissent sur un véhicule ou sur une personne qui marche, le long d'un trajet horizontal, on est amené à conclure que c'est la force de frottement qui permet le déplacement. Est-ce paradoxal ? *Pourquoi* ?

19. *Pourquoi* notre signe zodiacal (Bélier, Taureau, ..., Poissons) ne coïncide-t-il pas avec la constellation dans laquelle se trouvait le Soleil le jour de notre naissance ?

20. *Pourquoi* un joueur de football peut-il, seul, dans un tir de corner, marquer un but ?

1

Calcul vectoriel. Torseurs Analyse dimensionnelle

Même si l'addition vectorielle date des Grecs pour les vitesses et du XVI[e] siècle pour les forces (règle du parallélogramme), la forme actuelle du calcul vectoriel est attribuée aux mathématiens irlandais W. Hamilton en 1843 et allemand H. Grassmann en 1855. Comme outil mathématique en physique, il joue un rôle considérable car de nombreuses grandeurs physiques (vitesse, accélération, quantité de mouvement, etc.) sont représentées par des vecteurs.

Il apparaît donc naturel de rappeler, avant tout développement, les propriétés des vecteurs et notamment les opérations telles que l'addition vectorielle, le produit scalaire et le produit vectoriel.

On introduit ensuite la notion de vecteur lié et celle de torseur associé à un champ de vecteurs antisymétrique. Ce dernier concept est techniquement commode lorsqu'on est conduit à considérer des ensembles de vecteurs liés.

Enfin, on présente l'analyse dimensionnelle en soulignant son intérêt majeur en physique, pas uniquement en mécanique.

I. — ESPACE VECTORIEL

I.1. — Définition

On appelle *espace vectoriel* E sur un corps commutatif K un ensemble d'éléments, appelés *vecteurs*, qui satisfait aux propriétés suivantes :

i) l'ensemble E est muni d'une structure de groupe commutatif pour une loi de composition interne, l'*addition vectorielle*, notée simplement +.

ii) Pour deux vecteurs $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ appartenant à E, on a, si λ et μ appartiennent à K :

$$\lambda(\mathbf{U}+\mathbf{V}) = \lambda\mathbf{U} + \lambda\mathbf{V} \qquad (\lambda+\mu)\mathbf{U} = \lambda\mathbf{U} + \mu\mathbf{U}$$

$$\lambda(\mu\mathbf{U}) = (\lambda\mu)\mathbf{U} \qquad 1\,\mathbf{U} = \mathbf{U}$$

I . 2 . — Espace vectoriel euclidien

Un espace vectoriel E est *euclidien* s'il est muni d'un produit scalaire f qui, à deux vecteurs $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ de E, fait correspondre le nombre réel $f(\mathbf{U},\mathbf{V})$ tel que :

$$f(\mathbf{U},\mathbf{V}) = f(\mathbf{V},\mathbf{U}) \qquad f(\mathbf{U},\lambda\mathbf{V}) = \lambda f(\mathbf{U},\mathbf{V})$$
$$f(\mathbf{U},\mathbf{V}+\mathbf{W}) = f(\mathbf{U},\mathbf{V}) + f(\mathbf{U},\mathbf{W})$$
$$f(\mathbf{U},\mathbf{U}) > 0 \quad \text{si} \quad \mathbf{U} \neq \mathbf{0} \quad \text{et} \quad f(\mathbf{U},\mathbf{U}) = 0 \quad \text{si} \quad \mathbf{U} = \mathbf{0}.$$

La quantité $f(\mathbf{U},\mathbf{U})$ est appelée le carré de la norme de $\mathbf{U}$, laquelle est notée $\|\mathbf{U}\|$ ou plus brièvement U. Le plus souvent, on note le produit scalaire des deux vecteurs $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ simplement $\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}$.

I . 3 . — Base d'un espace vectoriel

On appelle *base* d'un espace vectoriel un système de n vecteurs de E, *indépendants*, permettant d'exprimer *linéairement* tout vecteur de E. On a donc :

$$\boxed{\mathbf{U} = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\mathbf{e}_i}$$

Les différents coefficients x_i sont appelés *composantes* de $\mathbf{U}$ dans la base considérée. La base est *orthonormée* si, quels que soient i et j différents, on a : $\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_i = 1$ et $\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j = 0$.

II . — ESPACE AFFINE

II . 1 . — Définition

On appelle *espace affine* $\mathcal{E}$ un ensemble d'éléments, appelés *points*, tel qu'à tout couple ordonné (AB) de deux points A et B (bipoint), on puisse faire correspondre un vecteur $\mathbf{AB}$ d'un espace vectoriel E ; si A, B, C désignent trois points de $\mathcal{E}$, on doit avoir :

i) $\mathbf{AB} = -\mathbf{BA}$

ii) $\mathbf{AC} = \mathbf{AB} + \mathbf{BC}$

iii) O étant un point quelconque de $\mathcal{E}$ et $\mathbf{V}$ un vecteur appartenant à E, il existe un point A et un seul de $\mathcal{E}$ défini par $\mathbf{OA} = \mathbf{V}$.

II . 2 . — Espace métrique

Un espace métrique est un espace affine auquel on a associé un espace vectoriel euclidien. On peut alors définir une norme pour tout vecteur associé aux points A et A' : la norme est la distance de ces points. En coordonnées cartésiennes, c'est-à-dire dans une base orthonormée $(\mathbf{e}_x,\ \mathbf{e}_y,\ \mathbf{e}_z)$ de E, on a :

$$\mathbf{OA} = \sum_i x_i\,\mathbf{e}_i \qquad \mathbf{OA}' = \sum_i x'_i\,\mathbf{e}_i \quad \text{d'où} \quad \mathbf{AA}' = \mathbf{OA}' - \mathbf{OA} = \sum_i (x'_i - x_i)\,\mathbf{e}_i$$

On en déduit la norme au carré de $\mathbf{AA}'$ selon :

$$AA'^2 = \sum_i (x'_i - x_i)\,\mathbf{e}_i \cdot \sum_j (x'_j - x_j)\,\mathbf{e}_j = \sum_i (x'_i - x_i)^2$$